Varianta 14

SUBIECTUL I

a) $AB = 5$.

b) $S = \dfrac{9}{2}$.

c) $i + 2i + ... + 10i = 55i$.

d) $\overline{z} = -19 - 9i$.

e) $\cos(2\pi + x) = 0{,}6$.

f) $a = 1$ şi $b = -4$.

SUBIECTUL II

1.

a) $x = \pm 2$.

b) $A^2 - A = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$**.**

c) $p = \dfrac{5}{9}$.

d) $n = 6$.

e) $\log_3 2 + \log_3 5 - \log_3 10 = 0$.

2.

a) $f(-1) = -\dfrac{2}{3}$**.**

b) $x + 2 + \dfrac{5}{x-2} = f(x); \forall x \in \mathbf{R} \setminus \{2\}$**.**

c) $f'(x) == 1 - \dfrac{5}{(x-2)^2}$ **.**

d) x=2 este asimptotă verticală .

e) $\int_{-1}^{1} (x-2) f(x) dx = \dfrac{8}{3}$.

SUBIECTUL III

a) $(x \circ y) \circ z = (x + y - 4) \circ z = x + y + z - 8$.

$x \circ (y \circ z) = x \circ (y + z - 4) = x + y + z - 8 \Rightarrow (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$,∀x,y,z∈**R.**

b) Demonstram relația $x \circ y = y \circ x \Leftrightarrow x + y - 4 = y + x - 4$ (A) ∀x,y∈**R**. Atunci $x \circ e = x, \forall x \in \mathbf{R} \Leftrightarrow x + e - 4 = x$, $\forall x \in \mathbf{R} \Leftrightarrow e = 4$.

c) Notăm cu $5'$ simetricul elementului 5, atunci : $5 \circ 5' = e \Leftrightarrow 5 + 5' - 4 = 4 \Leftrightarrow 5' = 3$.

d) $(-a)\circ a=-a+a-4=-4$, $\forall a\in$ **R.**

e) Fie $P(n):\underbrace{x\circ x\circ ...\circ x}_{de\ n\ ori}=nx-4(n-1)$, n$\in$ **N*.**

$P(1):x=x$ (A). Presupunem $P(k)$ (A) şi demonstrăm $P(k+1)$ (A), unde k$\geq$1.

$P(k):\underbrace{x\circ x\circ ...\circ x}_{de\ k\ ori}=kx-4(k-1)$ iar $P(k+1):\underbrace{x\circ x\circ ...\circ x}_{de\ k+1\ ori}=(k+1)x-4k$.

Dar $\underbrace{x\circ x\circ ...\circ x}_{de\,k+1\,ori}=\left(\underbrace{x\circ x\circ ...\circ x}_{de\,k\,ori}\right)\circ x\overset{P(k)}{=}(kx-4(k-1))\circ x=(k+1)x-4k.$

De unde $P(n)$ este (A) $\forall$n$\in$ **N*.**

f) Folosind **e)** ecuaţia devine $2007x-4\cdot 2006=4\Leftrightarrow x=4.$

g) Folosind **d)** şi faptul că legea „$\circ$" este comutativă şi asociativă, obţinem

$(-2007)\circ(-2006)\circ...\circ 0\circ....\circ 2007=(-2007\circ 2007)\circ(-2006\circ 2006)\circ...\circ(-1\circ 1)\circ 0$

$=(-4)\circ(-4)\circ...\circ(-4)\circ 0\overset{e)}{=}-16052\circ 0=-16056.$

SUBIECTUL IV

a) $f'(x)=-\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}.$

b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=-\dfrac{1}{12}.$

c) $f'(x)<0,\forall x>-1\Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe (-1, ∞).

d) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)=0$.

e) Din **c)** rezultă că funcţia f este strict descrescătoare şi din **d)** rezultă că $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$,deci f(x)>0, ∀x∈ (-1, ∞).

f) $\int_0^x \ln(t+a)dt=t\ln(t+a)\Big|_0^x-\int_0^x\dfrac{t}{t+a}dt==x\ln(x+a)-x+a\ln\dfrac{x+a}{a}.$

g) $S=\int_0^1 f(x)dx=\left(x\ln(x+2)-x+2\ln\dfrac{x+2}{2}\right)\Bigg|_0^1-\left(x\ln(x+1)-x+\ln(x+1)\right)\Big|_0^1$

=3ln3-4ln2.